Einleitung

Unter den in der Ökonomie angewandten mathematischen Methoden ist die lineare Optimierung zurzeit am Weitesten verbreitet. Ihrer Anwendung sind jedoch Grenzen gesetzt, da infolge der notwendigen Vereinfachung der Probleme größere Modellfehler in Kauf genommen werden müssen. Die nichtlineare Optimierung erfordert nicht eine solche Vereinfachung und erfasst die ökonomischen Prozesse und ihre Dynamik relativ genauer. Allerdings gibt es gegenwärtig eine Reihe von Faktoren, die der breiten Anwendung der nichtlinearen Optimierung entgegen stehen. Diese sind vor allem mathematischer aber auch ökonomisch-statistischer Natur:

1. Die Theorie der nichtlinearen Optimierung kann heute keineswegs als ein abgeschlossener Komplex betrachtet werden.
2. Es gibt gegenwärtig praktisch noch keinen universellen Lösungsalgorithmus der nichtlinearen Optimierung.
3. Viele existierende Lösungsalgorithmen sind derart kompliziert, dass ihre Anwendung große Schwierigkeiten bereitet.
4. Die Anforderungen an die ökonomische Modelleirung der zu lösenden Probleme sind höher als bei der Anwendung der linearen Optimierung und bedürfen umfassender Analysen der Erscheinungen; daraus leiten sich höhere Anforderungen an das Informationssystem ab.

Trotz der angeführten Schwierigkeiten sind jedoch Methoden der nichtlinearen Optimierung schon jetzt in begrenztem Maße anwendbar. Hinsichtlich der angeführten Problematik hat die quadratische Optimierung zurzeit eine besondere Bedeutung: Einerseits erfasst sie viele ökonomische Prozesse umfassender als die lineare Optimierung, andererseits benötigt sie nicht einen so komplizierten mathematischen Apparat wie die allgemeine nichtlineare Optimierung.

Verschiedene Anwendungsbeispiele der quadratischen Optimierung wurden bereits erfolgreich behandelt oder zeichnen sich immer deutlicher und in zunehmender Zahl ab. Zu diesen Gebieten gehören z.B. Preis-, Produktions- und Reklameplanung, verschiedene Standort-, Transport- und Erneuerungsprobleme, Risikoaufgaben, Wachstumsmodelle, verallgemeinerte statistische Regression usw. (Siehe „Literatur“).

Die *Verfahren* der quadratischen Optimierung lassen sich in vier Gruppen einteilen:

a) *Gradientenverfahren* (Rosen, Zoutendijk, Frisch usw.)
Die Anwendung dieser Verfahren ist nicht nur auf quadratische Probleme beschränkt; sie sind alle bezüglich der Zielfunktion und der Restriktionen verallgemeinerungsfähig. Das allgemeine Prinzip der Gradientenverfahren besteht in Folgendem: Man beginnt mit einem beliebigen zulässigen Startpunkt. Um vom $k-$ten Iterationspunkt x^k zu x^{k+1} zu gelangen, bestimmt man in x^k eine Richtung s^k derart, dass für hinreichend kleine $\lambda > 0$ der Strahl $x^k + \lambda s^k$ noch im zulässigen Gebiet liegt. Die einzelnen Gradientenverfahren unterscheiden sich lediglich in der Art, wie diese Richtung bestimmt wird.

b) *Simplex-Typ-Verfahren* (Beale, Wolfe, Barankin-Dorfman, Frank-Wolfe, usw.)
Diese Verfahren benutzen weitgehend den Simplexalgorithmus und schließen an die Kuh-Tucker-Optimalitätsbedingungen an.

c) *Kombinatorische Verfahren* (Theil-Van de Panne)

d) Dualverfahren (Hildreth-d'Esopo, Lemke usw.)
Diese Verfahren basieren auf gewissen Dualitätseigenschaften der streng konvexen quadratischen Programme. Zwei Probleme der mathematischen Optimierung heißen bekanntlich zueinander dual, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Stellt das ein Problem eine Minimierungsaufgabe dar, so ist das zweite Problem eine Maximierungsaufgabe.

2. Entweder sind beide Probleme lösbar – und es existiert ein endliches Optimum – oder keines der Probleme hat eine Lösung.

3. Die optimalen Zielfunktionswerte sind identisch.

Es ist das Anliegen dieser Arbeit, sich mit dem bekanntesten Verfahren der letzten Gruppe, nämlich dem Verfahren von Hildreth und d'Esopo zu befassen. Hildreth hat in [32] und [33] ein asymptotisches Verfahren zur Lösung der streng konvexen quadratischen Probleme entwickelt, das in enger Anlehnung an die Dualitätstheorie der quadratischen Optimierung steht. Die strenge Beweisführung für die Konvergenz wurde von d'Esopo in [17] vorgenommen.

Das Verfahren von Hildreth und d'Esopo weist u.a. folgendere Vorteile auf:

1. Es ist besonders für elektronische Rechenmaschinen geeignet, da die Iterationsschritte äußerst einfach zu programmieren sind.

2. Das Verfahren führt trotz eventueller Rechenfehler immer zum Ziel. Solche Fehler können nur die Konvergenz beeinträchtigen.

3. Das Verfahren kann mit einem beliebigen Startvektor $u^0 \geq 0$ beginnen, wodurch der gewöhnlich sehr hohe Aufwand, der bei anderen Verfahren durch das Aufsuchen einer zulässigen Lösung entsteht, erspart bleibt.

Das Verfahren von Hildreth und d'Esopo hat allerdings auch gewisse Nachteile:

1. Die Konvergenz ist in den meisten Fällen besonders schlecht. „So wurden z.B. für eine Aufgabe mit 10 Ungleichungen und 10 Variablen x_j (also $m = 10,\ n = 10$) etwa 5000 Iterationsschritte gebraucht, bis eine genügend genaue Optimallösung erreicht war." [68]

2. Das Verfahren ist unter einschränkender Voraussetzung bezüglich der Zielfunktion- sie muss streng konvex sein – verwendbar. Es ist allerdings in vielen konkreten Fällen möglich, durch Perturbation eine positiv semidefinite symmetrische Matrix auf eine streng positiv definite Matrix zu überführen und damit die Lösung des Problems mit Hilfe des Verfahrens von Hildreth und d'Esopo zu ermöglichen. Die Lösung würde dann natürlich nur eine Annäherung an die Lösung der ursprünglichen Aufgabe sein.

3. Die Einbeziehung der Nichtnegativitätsbedingungen kann zu unvertretbarer Problemvergrößerung führen. Mit anderen Worten, das Verfahren von Hildreth und d'Esopo ist besonders für solche Aufgaben geeignet, bei denen keine Nichtnegativitätsbedingungen auftreten.

Die genannten Nachteile, besonders die schlechte Konvergenz, haben die praktischen Anwendungsmöglichkeiten des Verfahrens in der ursprünglichen Form stark eingeschränkt. Diese Tatsache hat zu Überlegungen geführt, wie durch Konvergenzbeschleunigenden Verbesserungen die einschränkenden Eigenschaften des Verfahrens beseitigt oder wenigstens gemildert werden können. Es scheint, dass selbst Hildreth sich dieser Tatsache bewusst war, wenn er in [33] von einer „möglichen Modifikation" des Verfahrens spricht.

H. Werner (Institut für Datenverarbeitung, Dresden) hat in [68] eine Verbesserung des Verfahrens durch Extrapolation vorgeschlagen, die im Wesentlichen einige Elemente der Gradientenmethode aufweist. Eine mögliche Kombination des behandelten Verfahrens mit den Gradientenverfahren war bereits von Hildreth angedeutet, deren Effektivität allerdings wegen erheblichen Rechenaufwandes angezweifelt wurden. Unseres Erachtens stellt jedoch diese Problematik immer noch eine offene Frage dar, deren endgültige Beantwortung weitere komplexe, theoretische und empirische Analysen erfordert. Eine entsprechende Modifikation der zulässigen Richtungen von Zoutendijk [81] kann vermutlich zu diesem Zweck sehr nützlich sein.

Die vorliegende Arbeit stellt einen Versuch dar, in zwei verschiedenen Richtungen die Effektivität des Verfahrens von Hildreth und d'Esopo zu erhöhen:

1) Durch die Angabe einer Fehlerabschätzung des Primalzielfunktionswertes.

2) Durch die Abkürzung des Verfahrens.

Es sei hier bemerkt, dass weder 1) noch 2) eine gleichzeitige Anwendung anderer Verbesserungsmethode (z.B. des Extrapolationsalgorithmus von H. Werner) ausschließen. Sie können sogar komplementär wirken.

Die Arbeit besteht aus vier Kapiteln, einem Anhang und der „Literatur":

Der eigentliche Inhalt beginnt mit einem kurzen Überblick über die Theorie der quadratischen Optimierung. Hier werden die Problemstellung der quadratischen Optimierung und die dazugehörigen Kuhn-Tucker-Bedingungen formuliert. Anschließend werden einige wichtige Dualitätssätze genannt, die unerlässlich für das Verständnis der folgenden Kapitel sind.

Das zweite Kapitel befasst sich mit der Beschreibung des Verfahrens von Hildreth und d'Esopo in ursprünglicher Form.

Das dritte Kapitel hat die Herleitung, Anwendung und Diskussion einer Fehlerabschätzung zu den Dualverfahren der quadratischen Optimierung zum Inhalt. Die Fehlerabschätzung hat zwar einen allgemeineren Charakter; sie wird jedoch hier ausschließlich am Verfahren von Hildreth und d'Esopo illustriert. (Daher der Titel des Kapitels).
In diesem Kapitel werden zuerst nach einem Beweis des Kuhn-Tucker-Satzes einige relevante Eigenschaften der konvexen Funktionen behandelt.

Im Abschnitt 2 wird eine Fehlerabschätzung für konvexe Programme hergeleitet und auf den Fall der streng konvexen quadratischen Optimierungsprobleme spezialisiert.
Im nächsten Abschnitt dieses Kapitels wird eine von Hildreth angedeutete Fehlerabschätzung entwickelt und eine „Normalform“ von Werner wiedergegeben. Die verschiedenen Fehlerabschätzungen werden dann an einem Beispiel, berechnet nach dem Verfahren von Hildreth und d'Esopo, illustriert. Der anschließende Teil des dritten Kapitels beinhaltet eine kurze Diskussion der einzelnen Fehlerabschätzungen auf Grund der bisherigen Erfahrungen.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit der Abkürzung des Verfahrens von Hildreth und d'Esopo. Der Grundgedanke des Vorgehens ist zwar aus der Literatur bekannt, seine Formulierung wurde bis jetzt jedoch ohne jegliche streng mathematische Beweisführung nur angedeutet. Die Abkürzung wurde außerdem lediglich bei Berechnungen von Hand empfohlen. Umfangreiche empirische Erfahrungen zeigen jedoch, dass eine solche Abkürzung auch auf Rechenautomaten unter Umständen zu erheblicher Verringerung des Rechenaufwandes führen kann.

H. Werner untersucht in [67] auf Grund zahlreicher umfassender Aufgaben die wichtigsten Faktoren, die die Konvergenz des Verfahrens von Hildreth und d'Esopo beeinflussen. Er kommt u.a. zu der Schlussfolgerung, dass die Konvergenz im Wesentlichen von der Form der Koeffizientenmatrix des reduzierten Gleichungssystems (4. 21.) abhängt. Sie ist gut, wenn die Matrix große lineare Unabhängigkeit aufweist; bei fast linearer Abhängigkeit wird dagegen schlechte Konvergenz zu erwarten sein. Die Abkürzung des Verfahrens von Hildreth und d'Esopo wird also wesentlich zu der Konvergenzverbesserung beitragen, indem sie faktisch die für die Konvergenz entscheidende Phase überspringt.

Im vierten Kapitel werden zuerst einige Hilfssätze eingeführt, wobei gewisse, in [64] enthaltene Ergebnisse besonders ausgenutzt werden. Anschließend werden zwei Hauptsätze bewiesen, auf Grund derer in Abschnitt 2 der Abkürzungsalgorithmus in zwei verschiedenen Varianten entwickelt wird.
Das vierte Kapitel schließt mit einem Illustrationsbeispiel und einer kurzen Diskussion des abgekürzten Verfahrens an Hand empirischer Berechnungen ab.

Es sei bemerkt, dass die Flussdiagramme weniger als unmittelbare Einleitung zur Programmierungsarbeit, sondern vor allem zwecks mathematischer Veranschaulichung des algorithmischen Vorgehens gedacht sind.

Die im Anhang angeführten Aufgaben sind aus [64] entnommen worden. Sie wurden von H. Werner u.a. zur Erprobung des Verfahrens von Hildreth und d'Esopo angewandt und bilden auch die Basis unserer numerischen Berechnungen.
Für unsere empirischen Berechnungen haben wir aber auch einige größere Aufgaben verwendet, die aus technischen Gründen in der Arbeit nicht angeführt sind.

Die „Literatur“ enthält sowohl die in der Arbeit zitierten Quellen als auch eine Reihe von wichtigen theoretischen und praktischen Arbeiten über die quadratische Optimierung, die direkt oder indirekt mit unserer Thematik im Zusammenhang stehen.

Zum Schluss habe ich die angenehme Pflicht, allen denen zu danken, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben. Insbesondere danke ich

Herrn Prof. Dr. Habil. W. Dück für seine beispielhafte Betreuung,

Herrn Dipl.-Wirtschaftler K. F. Linke für seine zahlreichen Anregungen und seine Unterstützung bei der Korrektur der Arbeit,

Herrn Dipl.-Mathematiker L. Grosse und Frau Oschliess (Rechenzentrum der Hochschule für Ökonomie) für Programmierung und Berechnung der empirischen Untersuchungen,

Herrn Dipl.-Mathematiker H. Werner (IDV Dresden) für seine wertvollen Hinweise und für die Durchführung eines Teils der in der Arbeit verwendeten Berechnungen.