Anhang 9

Einige mathematische Aussagen des Kapitels 3

S. A9. 1.:
Gegeben sei das Problem (1. 23.). Dann gilt:

$$\langle (B.\ 7.) \rangle \ \Rightarrow\ \langle \{x^{(\upsilon)}\},\ \upsilon \in N \cup \{0\} :\ (VSA-1);\ x^{(\upsilon+1)} \geq x^{(\upsilon)} \geq 0,\ \upsilon \in N \cup \{0\} \rangle.$$

B e w e i s (Induktion):
Es gilt

$$x^{(1)} = b(x^{(0)}) + x^{(0)} \qquad (\because\ (VSA-1))$$

$$\geq x^{(0)}. \qquad (\because\ b(x) \in R_+^n)$$

Es gelte die Induktionsannahme

(A. 9. 1.) $\quad x^{(\upsilon)} \geq x^{(\upsilon-1)} \geq 0.$

Es gilt dann

$$x^{(\upsilon+1)} - x^{(\upsilon)} = b(x^{(\upsilon)}) - b(x^{(\upsilon-1)}) \qquad (\because\ (VSA-1))$$

$$\geq 0, \qquad (\because\ (B.\ 7.),\ (A9.\ 1.))$$

d. h.

$$x^{(\upsilon+1)} \geq x^{(\upsilon)}$$

$$\geq 0, \quad \upsilon \in N \cup \{0\}.$$

q. e. d.

S. A9. 2.:
Gegeben sei das Problem (1. 23.). Es gelten die Bedingungen (*B. 7.*) und (*B. 8.*).
Dann gilt:

$$\langle (1.\ 23 \text{ ist lösbar für } \textit{ein}\ \tilde{y} \in R_+^n) \rangle \ \Rightarrow\ \langle (1.\ 23 \text{ ist lösbar für } \textit{alle}\ y \in [0,\ \tilde{y}]) \rangle.$$

B e w e i s:

Sei $\{x^{(\upsilon)}\},\ \upsilon \in N \cup \{0\}$ bzw. $\{\tilde{x}^{(\upsilon)}\},\ \upsilon \in N \cup \{0\}$ zwei nach (*VSA-1*) erzeugte Folgen mit

$x^{(0)} := y$ bzw. $\tilde{x}^{(0)} := \tilde{y}.$

Aus S. A9. 1. Folgt, dass beide Folgen nichtfallend sind. Wegen $y \leq \tilde{y}$ und (*B. 7.*) lässt sich ferner zeigen, dass

$$x^{(\upsilon)} \le \tilde{x}^{(\upsilon)}, \quad \upsilon \in N \cup \{0\},$$

Gilt. Aus S. 3. 1. Ist bekannt, dass $\{\tilde{x}^{(\upsilon)}\},\ \upsilon \in N \cup \{0\}$ nach oben beschränkt ist. Hieraus folgt die Behauptung.

q. e. d.

S. A9. 3.:
Gegeben sei das Problem (1. 23.). Es gelten die Bedingungen (*B. 7.*), (*B. 8.*) und

(*B. 9.*) $\quad b(\lambda x) \le \lambda b(x),\ \forall \lambda > 1;\ \forall x \in R_+^n.$

Dann gilt:

$$\left\langle \text{(1. 23.) ist lösbar für } \textit{ein } y = \tilde{y} > 0 \right\rangle \ \Rightarrow\ \left\langle \text{(1. 23.) ist lösbar für } \textit{alle } y \in R_+^n \right\rangle$$

B e w e i s:

Es sei $\{x^{(\upsilon)}\},\ \upsilon \in N \cup \{0\}$, eine durch (*VSA-1*) definierte Folge für $y = \bar{y} := \lambda \tilde{y}$ für ein $\lambda > 1$.

Wegen S.A9. 1. Sind beide Folgen monoton wachsend, und die Folge $\{\tilde{x}^{(\upsilon)}\},\ \upsilon \in N \cup \{0\}$, ist konvergent (da (1. 23.) für y lösbar angenommen wird und wegen S. A9. 1.).
Sei

(A9. 2.) $\quad \bar{x}^{(\upsilon)} \le \lambda \tilde{x}^{(\upsilon)}$ für ein $\upsilon \in N \cup \{0\}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\bar{x}^{(\upsilon)} &= b(\bar{x}^{(\upsilon-1)}) + \lambda \tilde{y} \\
&\le b(\lambda \bar{x}^{(\upsilon-1)}) + \lambda \tilde{y} && (\because \text{ (A9. 2.), (}B\text{. 7.)}) \\
&\le \lambda(b(\tilde{x}^{(\upsilon-1)}) + \tilde{y}) && (\because \text{ (}B\text{. 9.)}) \\
&= \lambda \tilde{x}^{(\upsilon-1)}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Folge $\{\bar{x}^{(\upsilon)}\},\ \upsilon \in N \cup \{0\}$, auch beschränkt und wegen der Monotonie konvergent. Es existiert also eine Lösung des Problems (1. 23.) für $y = \lambda \tilde{y}$, falls das Problem für $y = \tilde{y} > 0$ lösbar ist. Die Aussage des Satzes folgt aus Satz A. A9. 2. Und der Tatsache, dass λ beliebig groß gewählt werden kann.

q. e. d.

S. A9. 4.:
Gegeben sei das Problem (1. 23.). Es gelten die Bedingungen (*B. 7.*), (*B. 8.*) und (*B. 9.*).
Dann gilt:

$$\left\langle \text{(1. 23.) ist lösbar für } \textit{ein } y = \tilde{y} > 0 \right\rangle \Rightarrow \left\langle \text{(1. 23.) ist eindeutig lösbar für } y = \tilde{y} > 0 \right\rangle.$$

B e w e i s:

Sei $\tilde{x}$ eine Lösung des Problems (1. 23.), die als Grenzwert der durch (*VSA-1*) definierten Folge $\{x^{(\upsilon)}\}$, $\upsilon \in N \cup \{0\}$, mit $x^{(0)} := \tilde{y}$ gewonnen wurde. x^* möge eine weitere beliebige Lösung dieses Problems sein. Wegen S. 3. 2. gilt

(A9. 3.) $\qquad \tilde{x} \le x^*.$

Sei ferner

$$\lambda \in R^1: \ \min(\lambda \tilde{x}_i - x_i^*) = 0.$$

Dann gilt

$$\lambda \tilde{x} - x^* \ge 0,$$

und wegen (A9. 3.): Entweder ist $\lambda = 1,$ womit die Behauptung des Satzes bewiesen ist oder ist $\lambda > 1.$

Wir betrachten den letzteren Fall: Da $x, \tilde{x}^*$ Lösungen des Problems (1. 23.) sind, hat man:

$$\begin{aligned} \lambda \tilde{x} - x^* &= \lambda b(\tilde{x}) - b(x^*) + (\lambda - 1)y \\ &\ge b(\lambda \tilde{x}) - b(x^*) + (\lambda - 1)y && (\because \ (B.\ 9.)) \\ &\ge (\lambda - 1)y && (\because \ \lambda \tilde{x} \ge x^* (B.\ 7.)) \\ &> 0. && (\because \ y > 0, \ \lambda \in R^1 \setminus \{0\}) \end{aligned}$$

Da aber der Vektor $\lambda \tilde{x} = x^*$ mindestens eine Nullkomponente hat, ist dies ein Widerspruch.

Folglich ist $\lambda = 1$ und $\tilde{x} = x^*.$

q. e. d.

<u>S. A9. 5.</u>:

Es gilt:

$$\left\langle \exists \text{ ein } \lambda \in [0, \ 1[: \| b(x^2) - b(x^1) \| \le \| x^2 - x^1 \|, \ x^1, x^2 \in R_+^n \right\rangle$$
$$\Rightarrow$$
$$\left\langle \text{(1. 23.) ist eindeutig global lösbar} \right\rangle.$$

B e w e i s:

Der Beweis folgt aus dem nachstehenden *Kontraktionssatz*, der in [74] bewiesen wird:

Kontraktionssatz:

Gegeben sei die auf der abgeschlossenen Teilmenge $D_0 \subset D$ kontrahierende Abbildung

$$g: \ D \subset R^n \to R^n.$$

Es gelte ferner

$$g(D_0) \subset D_0.$$

Dann hat die Abbildung einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $x^* \in D_0$.
Die Folge

(A9. 4.) $$x^{(\upsilon)} = g(x^{(\upsilon-1)}), \quad \upsilon \in N,$$

Konvergiert für jedes $x^0 \in D_0$ gegen x^*.

Zur Anwendung des Kontraktionssatzes zum Beweis von S. A9. 5. Müssen folgende Tatsachen berücksichtigt werden:

1. $b_y := b + y : R_+^n \to R_+^n$ ersetzt die Abbildung g.
2. b_y ist trivialerweise genau dann kontrahierend auf D, wenn b es ist.
3. Aus $D = R_+^n$ folgt für jedes $x \in R_+^n$ wegen $y \in R_+^n$ und $b(x) \in R_+^n$ auch $b_y = b(x) + y \in R_+^n$.
   Damit ist in diesem Fall die Bedingung $b_y(R_+^n) \subset R_+^n$ von vornherein erfüllt.

q. e. d.

S. A9. 6.:
Gegeben sei das Problem (1. 23.). Es gelten die Bedingungen (*B. 4.*), (*B. 7.*) und (*B. 8.*). Es existiere ferner

$$\sup_{x \in R_+^n} a_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n) := \bar{a}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, ..., n.$$

Dann gilt:

(*B. 11.*)
$$\left\langle \begin{array}{l} \lambda(\bar{A}) < 1;\ \lambda(\bar{A}) : \text{ der größte Eigenwert der Matrix } A \\ \bar{A} := (\bar{a}_{ij}),\ i, j = 1, 2, ..., n. \end{array} \right\rangle$$

$$\Rightarrow$$

$$\langle (1.\ 23.) \text{ ist global lösbar.} \rangle$$

B e w e i s:
Es gilt:

$$x^{(\upsilon)} = A(x^{(\upsilon-1)})x^{(\upsilon-1)} + y \qquad (\because\ (VSA-1))$$

$$\leq A(x^{(\upsilon)})x^{(\upsilon)} + y \qquad (\because (B.\ 7.))$$

$$\leq \bar{A}(x^{(\upsilon)}) + y,$$

$$x^{(\upsilon)} \leq (E - \bar{A})^{-1} y. \qquad (\because (B.\ 11.))$$

Damit ist die Folge $\{x^{(\upsilon)}\},\ \upsilon \in N \cup \{0\}$, nach oben beschränkt. Andererseits ist diese Folge nach Satz S. 9. 1. Monoton. Unter Berücksichtigung von S. 3. 1. Folgt die Behauptung.

q. e. d.

B. A9. 1.:
Die Bedingung (B. 11.) garantiert die Existenz einer Lösung von (1. 23.) für ein beliebiges $y \in R_+^n$, nicht jedoch deren Eindeutigkeit. Dies wird an einem *Gegenbeispiel* illustriert:
Sei:

$$a_{ij} := \begin{cases} x_j & \text{für} \quad x_j \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \text{für} \quad x_j > \frac{1}{3} \end{cases}, \qquad i, j = 1, 2;$$

$$y := \left(\frac{1}{9} \quad \frac{1}{9} \right)^T.$$

Es gilt:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Aber sowohl

$$x^1 := \left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \right)^T$$

als auch

$$x^2 := \left(\frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \right)^T$$

lösen das Problem.

S. A9. 7:
Gegeben sei das Problem (1. 23.). Es gelten die Bedingungen (*B. 4.*), (*B. 7.*), (*B. 8.*), (*B. 10*), (*B. 11.*) und

(*B. 12.*) $\qquad A(x^2) \leq A(x^1),\ \forall x^2 \geq x^1 \geq 0.$

Dann ist (1. 23.) eindeutig global lösbar.

B e w e i s:

Existenz:
Siehe S. A9. 6.

Eindeutigkeit:
Das Problem habe die Lösungen $x^i,\ i=1,2,...,m$, d.h., es gelte:

(A9. 5.) $\qquad x^i = A(x^i)x^i + y, \quad i=1,2,...,m.$

Es gilt dann:

(A9. 6.) $\qquad \exists \text{ ein } x^1 :\ x^1 \le x^i,\ i=1,2,...,m.$ $\qquad (\because$ S. 3. 2.)

Ferner gilt für $i=1,2,...,m$:

$$x^i - x^1 = A(x^i)x^i - A(x^1)x^1 \qquad (\because \text{ (A9. 5.), } (VSA-1))$$

$$\le A(x^1)x^i - A(x^1)x^1 \qquad (\because \text{ (A9. 6.), } (B.\ 12.))$$

$$= A(x^1)(x^i - x^1)$$

$$\le \bar{A}(x^i - x^1),$$

$$(E - \bar{A})(x^i - x^1) \le 0,$$

(A9. 7.) $\qquad x^i - x^1 \le 0,$ $\qquad (\because \text{ } (B.\ 11.))$

$$x^i \le x^1. \qquad (\because \text{ (A9. 6.), (A9. 7.)})$$

q . e. d.

S. A9. 8:
Gegeben sei das Problem (1. 23.). Es gelten die Bedingungen (*B. 4.*), (*B. 7.*), (*B. 8.*) und

(*B. 13.*) $\qquad 1^T A(x^2) \le 1^T A(x^1) < 1^T,\ \forall x^2 \ge x^1 \ge 0,$

wobei

$$1 := (1,\ 1,...,1)$$

ist.
Dann ist das Problem (1. 23.) eindeutig global lösbar.

B e w e i s:
Es gilt

(A9. 8.) $\qquad 1^T(x^{(\upsilon)} - x^{(\upsilon-1)}) = 1^T y - 1^T(E - A(x^{(\upsilon-1)}))x^{(\upsilon-1)}.$

Falls die linke Seite der Gleichung (A9. 8.) gleich Null ist, gilt wegen (*B. 7.*) $x^{(\upsilon)} = x^{(\upsilon-1)}$, und damit existiert eine Lösung.
Ist die linke Seite der Gleichung (A9. 8.) positiv, so hat man

$$1^T(E - A(x^{(\upsilon-1)}))x^{(\upsilon-1)} < 1^T y.$$

Es gilt jedoch wegen (*B. 13.*)

$$1^T(E - A(x^{(\upsilon-1)})) > 0.$$

Damit ist $\{x^{(\upsilon)}\},\ \upsilon \in N \cup \{0\}$ für jedes feste *y* nach oben beschränkt. Dies zusammen mit der Monotonie der Folge $\{x^{(\upsilon)}\},\ \upsilon \in N \cup \{0\}$, macht sie auch konvergent.
Gemäß S. 3. 1. Ist (1. 23.) global lösbar. Wir zeigen nun, dass die Lösung dieses Problems eindeutig ist:

Seien $\tilde{x},\ x^*$ zwei Lösungen des Problems (1. 23.), wobei $\tilde{x}$ als Grenzwert der durch (*VSA-1*) definierte Folge gewonnen wurde. Dann gilt wegen S. 3. 2.

(A9. 9.) $$\tilde{x} \le x^*.$$

Ferner hat man:

$$\begin{aligned} 1^T(x^* - \tilde{x}) &= 1^T(A(x^*)x^* - A(\tilde{x})\tilde{x}) \\ &\le 1^T A(\tilde{x})(x^* - \tilde{x}), \qquad (\because\ (B.\ 13.)) \end{aligned}$$

(A9. 10.) $$1^T(E - A(\tilde{x}))(x^* - \tilde{x}) \le 0.$$

Andererseits gilt

$$1^T(E - A(\tilde{x})) > 0 \qquad (\because\ (B.\ 13.))$$

und wegen (A9. 10.)

$$x^* - \tilde{x} \le 0\,.$$

Dies ergibt zusammen mit (A9. 9.) $x^* = \tilde{x}$.

q. e. d.

B. A9. 2.:
Zum Beweis des Satzes S. A9. 3. unter der zusätzlichen Bedingung (*B. 4.*) und des Satzes S. A9. 8. Genügt außer (*B. 7.*), (*B. 8.*) eine schwächere Version der Bedingung (*B. 13.*), nämlich

(*B. 14.*) $$\left\langle \begin{array}{l} 1^T A(x^2) \le 1^T A(x^1),\ \forall x^2 \ge x^1 \ge 0 \\ 1^T A(x) < 1^T,\ \forall x:\ x > A(x)x \end{array} \right\rangle$$

vorauszusetzen.

Auf den Beweis von S. A9. 8. Unter der Bedingung (*B. 14.*) (statt (*B. 13.*)) wird hier verzichtet. Die Argumentation des zweiten Teils des genannten Satzes behält ihre Gültigkeit, jedoch nicht die zusätzliche Stärke (*B. 13.*).

Im Folgenden wird der Satz S. A9. 5. unter der zusätzlichen Bedingung (*B. 14.*) neu formuliert und bewiesen:

S. A9. 9.:
Gegeben sei das Problem (1. 23.). Es gelten die Bedingungen (*B. 4.*), (*B. 7.*), (*B. 8.*) und (*B. 14.*).
Dann gilt:

$$\left\langle \text{(1. 23.) ist lösbar für } \textit{ein } y = \tilde{y} > 0 \right\rangle \Rightarrow \left\langle \text{(1. 23.) ist lösbar für } \textit{alle } y \in R_+^n \right\rangle.$$

B e w e i s:

Sei $\tilde{x}$ eine Lösung von (1. 23.), die als Grenzwert der durch (*VSA-1*) definierte Folge $\{\tilde{x}^{(\upsilon)},\ \upsilon \in N \cup \{0\}\}$ für $y = \tilde{y} > 0$ gewonnen wurde. Die Existenz der Lösung $\tilde{x}$ ist durch die Voraussetzungen des Satzes und wegen der Tatsache gegeben, dass für alle $\tilde{x} \in R_+^n$, für die $\tilde{x} > A(\tilde{x})\tilde{x}$, gilt, $\lambda(A(\tilde{x})) < 1$ ist (Diese Behauptung lässt sich leicht beweisen).

Sei ferner $\{\approx^{(\upsilon)}, \upsilon \in N \cup \{0\}\}$ eine durch (*VSA-1*)definierte Folge mit $y = \tilde{x} \geq \tilde{y} > 0$.
Es gilt nun:

$$\begin{aligned} \approx^{(\upsilon)} &= A(\approx^{(\upsilon-1)})\approx^{(\upsilon-1)} + y \\ &\leq A(\approx^{(\upsilon)})\approx^{(\upsilon)} + y. \end{aligned} \qquad (\because \text{(B. 7.)})$$

Damit hat man:

$$\begin{aligned} 1^T \approx^{(\upsilon)} &\leq 1^T A(\approx^{(\upsilon 1)})\approx^{(\upsilon)} + 1^T y \\ &\leq 1^T A(\tilde{x}^{(\upsilon)})\approx^{(\upsilon)} + 1^T y, \end{aligned} \qquad (\text{(B. 13.) und } \approx^{(\upsilon-1)} \geq \tilde{x} \text{ wegen S. 3. 2.})$$

$$\begin{aligned} (1^T - 1^T A(\tilde{x}^{(\upsilon)}))\approx^{(\upsilon)} &\leq 1^T y \\ &> 0. \end{aligned} \qquad (\because y > 0)$$

Da $(1^T A(x))$ wegen (*B. 13.*) streng positiv ist, ist $\{\approx^{(\upsilon)},\ \upsilon \in N \cup \{0\}\}$ nach oben beschränkt und damit auch konvergent. Gemäß S. 3. 1. Ist (1. 23.) für ein $y = \tilde{y} > 0$ lösbar. Wegen S. A0. 2. Ist es auch für alle $y \in R_+^n$ lösbar,

q. e. d.

S. A9. 10.:
Gegeben sei das Problem (1. 23.). Es gelten die Bedingungen (*B. 4.*) und

(*B. 15.*) $b(x)$ ist differenzierbar für alle $x \in R_+^n$

(*B. 16.*) $b(0) = 0$

(*B. 18.*) $b(x)$ ist konkav für alle $x \in R_+^n$.

Dann gilt:

(*B. 19.*) $$\left\langle \exists \left(\text{ein } x^0 > 0 \wedge \text{ ein } \lambda \in [0,\ 1[:\ b(x^0) \le \lambda x^0 \right) \right\rangle$$

$$\Rightarrow$$

(1. 23.) ist global lösbar.

B e w e i s: Vgl. [81].

S. A9. 11.:
Gegeben sei das Problem (1. 23.). Es gelten die Bedingungen (*B. 4.*), (*B. 15.*), (*B. 16.*), (*B. 18.*), (*B. 19.*) und

(*B. 20.*) $b'(x)$ ist für kein $x > 0$ zerlegbar.

Dann gilt folgendes:

A. Das Problem (1. 23.) hat für jedes $y^0 > 0$ eine eindeutige Lösung $x^* = x(y)$;
B. Die Folgen

(A9. 11.) $$\{x^{(\upsilon)}\},\ x^{(0)} := y, \quad x^{(\upsilon)} := b_y(x^{(\upsilon-1)}),\ \upsilon \in N$$

(A9. 12.) $$\{\tilde{x}^{(\upsilon)}\},\ x^{(0)} := t_0 x^0, \quad \tilde{x}^{(\upsilon)} := b_y(\tilde{x}^{(\upsilon-1)}),\ \upsilon \in N$$

konvergieren gegen x^*. Dabei gilt:

$$x^{(\upsilon-1)} \le x^{(\upsilon)} \le x^* \le \tilde{x}^{(\upsilon)} \le \tilde{x}^{(\upsilon-1)}, \quad \upsilon \in N.$$

C. Die Folge

$$\{\approx{x}^{(\upsilon)}\}, \quad \approx{x}^{(\upsilon)} := b_y(\approx{x}^{(\upsilon-1)}),\ \upsilon \in N,$$

konvergiert für ein beliebiges $\approx{x}^{(0)} > 0$ gegen x^*.

B e w e i s: Vgl. [81].